حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید P(x) و D(x) چندجمله‌ای‌هایی باشند که D(x) از درجهٔ کمتر از P(x) باشد و D(x) از درجهٔ ۱ یا بیشتر باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌هایی منحصربه‌فرد مانند Q(x) و R(x) وجود دارند، به‌طوری‌که:

$$P(x)=D(x).Q(x)+R(x)$$

در این رابطه R(x) یا صفر است و یا از درجهٔ کمتر از درجهٔ D(x) است. چندجمله‌ای P(x) **مقسوم**، D(x) مقسوم‌علیه، Q(x) خارج‌قسمت و R(x) باقی‌مانده، نامیده شده است.

قبل از تقسیم چندجمله‌ای‌ها، مطمئن می‌شویم که هر چند جمله‌ای به‌صورت نزولی مرتب نوشته شده باشد. در بعضی حالت‌ها، قرار دادن صفر (ضریب صفر) برای جملاتی که در مقسوم وجود ندارند، مفید است؛ به‌طوری که جملات مشابه در یک ستون و زیر هم قرار بگیرند. در مثال ۱ این مطلب نشان داده شده است.

سؤال: اولین کاری که باید برای پیدا کردن خارج‌قسمت تقسیمِ زیر انجام دهید، چیست؟

$$(۲x+۱+x^۲)\div(x-۱)$$

مثال ۱. تقسیم چندجمله‌ای‌ها

تقسیم کنید:

$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{(x-۳)}$$

حل: صورت کسر را به‌صورت نزولی، مرتب می‌نویسیم. سپس تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{x-۳}=\frac{x^۴-۵x^۲-۸x+۳}{x-۳}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^۴+۰x^۳-۵x^۲-۸x+۳ & x-۳ \\ \hline
\underline{x^۴-۳x^۳} & x^۳+۳x^۲+۴x+۴ \\
\quad ۳x^۳-۵x^۲ & \\
\quad \underline{۳x^۳-۹x^۲} & \\
\qquad ۴x^۲-۸x & \\
\qquad \underline{۴x^۲-۱۲x} & \\
\qquad\quad ۴x+۳ & \\
\qquad\quad \underline{۴x-۱۲} & \\
\qquad\quad\ \ ۱۵ &
\end{array}$$

قرار دادن $۰x^۳$ به جای جملهٔ جاافتاده کمک می‌کند تا جملات را به‌صورت ستونی زیر هم مرتب بنویسیم.

بنابراین:

$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{x-۳}=x^۳+۳x^۲+۴x+۴+\frac{۱۵}{x-۳}$$

ترجمه برای دانش‌آموزان

The division process ends when the expression in the bottom row is of lesser degree than the divisor. The expression in the bottom row is the **remainder,** and the polynomial in the top row is the **quotient.** Thus $(6x^3-16x^2+23x-5) \div (3x-2)=2x^2-4x+5$ with a remainder of 5.

Although there is nothing wrong with writing the answer as we did above, it is more common to write the answer as the quotient plus the remainder divided by the divisor. (See the note at the left.) Using this method, we write

$$\frac{\overbrace{6x^3-16x^2+23x-5}^{\text{Dividend}}}{\underbrace{3x-2}_{\text{Divisor}}}=\overbrace{2x^2-4x+5}^{\text{Quotient}}+\frac{5}{3x-2}\begin{array}{l}\text{Remainder}\\ \text{Divisor}\end{array}$$

In every division, the dividend is equal to the product of the divisor and quotient, plus the remainder. That is,

$$\underbrace{6x^3-16x^3+23x-5}_{\text{Dividend}}=(\underbrace{3x-2}_{\text{Divisor}}).(\underbrace{2x^2-4x+5}_{\text{Quotient}})+\underbrace{5}_{\text{Remainder}}$$

$$\text{Dividend} = \text{Divisor} \cdot \text{Quotient} + \text{Remainder}$$

The preceding polynomial division concepts are summarized by the following theorem.

Note

$\frac{20}{3}$ written as a mixed number is $6\frac{2}{3}$. Recall, however, that $6\frac{2}{3}$ means $6+\frac{2}{3}$, which is in the form quotient $+\frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Let .... فرض کنید	2. Polynomial .... چندجمله‌ای
3. Degree .... درجه	4. Unique .... یکتا، منحصربه فرد
5. Dividend .... مقسوم	6. Divisor .... مقسوم‌علیه
7. Quotient .... خارج‌قسمت	8. Remainder .... باقی‌مانده
9. Descending .... نزولی	10. Missingterm .... جملهٔ جاافتاده
11. Numerator .... صورت کسر	12. Inserting .... قرار دادن، جاسازی کردن

Division Algorithm for Polynomials

Let *P(x)* and *D(x)* be polynomials, with *D(x)* of lower degree than *P(x)* and *D(x)* of degree 1 or more. Then there exist unique polynomials *Q(x)* and *R(x)* such that

$$P(x)= D(x).\ Q(x)+R(x)$$

where *R(x)* is either 0 or of degree less than the degree of *D(x)*. The polynomial *P(x)* is called the **dividend**, *D(x)* is the **divisor**, *Q(x)* is the **quotient**, and *R(x)* is the **remainder**.

Before dividing polynomials, make sure that each polynomial is written in descending order. In some cases, it is helpful to insert a 0 in the dividend for a missing term (one whose coefficient is 0) so that like terms align in the same column. This is demonstrated in Example 1.

Question: What is the first step you should perform to find the quotient of

$$(2x+1+x^2)\div(x-1)?$$

EXAMPLE 1 Divide Polynomials

Divide: $\dfrac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}$

Solution

Write the numerator in descending order. Then divide.

$$\frac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}=\frac{x^4-5x^2-8x+3}{x-3}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+0x^3-5x^2-8x+3 & \quad x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-3x^3} & x^3+3x^2+4x+4 \\
\quad 3x^3-5x^2 & \\
\quad \underline{3x^3-9x^2} & \\
\qquad 4x^2-8x & \\
\qquad \underline{4x^2-12x} & \\
\qquad\quad 4x+3 & \\
\qquad\quad \underline{4x-12} & \\
\qquad\qquad 15 &
\end{array}$$

• Inserting $0x^3$ for the missing term helps align like terms in the same column.

$$\text{Thus } \frac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}=x^3+3x^2+4x+4+\frac{15}{x-3}$$